



# Antenne acoustique et parcimonie lors de la localisation de sources sonores

Joseph Lardies, Marc Berthillier

## ► To cite this version:

Joseph Lardies, Marc Berthillier. Antenne acoustique et parcimonie lors de la localisation de sources sonores. 21ème Congrès Français de Mécanique, Jan 2013, France. pp.1 - 6. hal-00982912

**HAL Id: hal-00982912**

**<https://hal.science/hal-00982912>**

Submitted on 24 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Antenne acoustique et parcimonie lors de la localisation de sources sonores

J. LARDIES, M. BERTHILLIER

Institut FEMTO-ST ; Département de Mécanique Appliquée, rue de l'Epitaphe, BESANCON  
joseph.lardies@univ-fcomte.fr

## Résumé :

*La représentation parcimonieuse des signaux issus des microphones formant une antenne acoustique est une nouvelle méthode pour localiser les sources de bruit. L'un des aspects primordiaux de la méthode consiste à déterminer le paramètre de régularisation qui contrôle le degré de parcimonie de la représentation et qui constitue un compromis entre la solution parcimonieuse et l'erreur résiduelle. Trois méthodes sont présentées pour déterminer le paramètre de régularisation. Ces méthodes sont basées :*

- *sur l'analyse de la courbe en L qui est construite en reportant les variations de la norme en  $l_1$  de la solution parcimonieuse en fonction de l'écart aux données en norme de Frobenius*
- *sur la minimisation de l'erreur résiduelle qui est supposée avoir la distribution du Chi2*
- *sur la minimisation de l'erreur résiduelle qui est supposée avoir la distribution de Rayleigh*

*Des exemples de simulation numérique et des tests en chambre anéchoïque sont présentés montrant les performances de l'algorithme de traitement d'antenne lors de la localisation de sources sonores.*

## Abstract :

*The sparse representation of signals from an acoustical array is a new method for source localization and is presented in this communication. We focus on how to obtain the regularization parameter which handles a tradeoff between finding a sparse solution and restricting the residual error. Three methods are presented to estimate the regularization parameter:*

- *the L-curve method where the regularization parameter balances the tradeoff between the sparsity and the residual*
- *the residual error minimization assuming a Chi-square distribution*
- *the residual error minimization assuming a Rayleigh distribution*

*Numerical and experimental results in an anechoic room are presented showing the effectiveness of our procedure in noise source localization.*

**Mots clefs :** antenne acoustique, localisation, parcimonie, paramètre de régularisation

## 1 Introduction

Les propos qui suivent sont applicables, en principe, à toutes les antennes de réception qui sont formées à partir de capteurs séparément accessibles, c'est-à-dire dont les sorties individuelles sont physiquement disponibles. Des antennes de ce type apparaissent dans de nombreuses disciplines comme en géophysique lors de l'exploration sismique, en astronomie pour détecter de faibles signaux, en acoustique sous-marine pour localiser des cibles et des objets enfouis dans le sédiment marin, en acoustique aérienne pour localiser des sources de bruit, lors de la surveillance de structures mécaniques en fonctionnement par analyse d'émission acoustique... Le but final est la localisation de sources en présence de bruit ambiant. Cet exposé se situe dans une ambiance acoustique, et bien que ce ne soit pas là une condition fondamentale, nous admettons ici qu'un capteur (un microphone) est un élément sensible, ponctuel, qui mesure sans l'altérer le champ au point où il se trouve. On considère que les sources émettrices sont éloignées de l'antenne et le rôle du traitement d'antenne est d'effectuer un filtrage spatial de façon à séparer au mieux les différentes

composantes du champ sonore [1,2]. Par sources éloignées, on entend des sources suffisamment distantes de l'antenne acoustique pour paraître comme ponctuelles et les signaux émis par les sources arrivent sur l'antenne sous forme d'ondes planes. Dans cette communication le problème de localisation de sources est ramené à une représentation parcimonieuse du spectre spatial des données temporelles issues des capteurs. Dans cette représentation un premier terme en norme  $l_1$ , appelé terme de pénalité, favorise les modèles parcimonieux et un deuxième terme en norme de Frobenius, appelé terme d'attache aux données, minimise l'erreur entre un modèle donné et les observations provenant des capteurs (erreur résiduelle). Un certain nombre d'algorithmes ont été développés pour résoudre ce problème de minimisation sous contraintes et l'un des aspects fondamentaux est la détermination du paramètre de régularisation. Ce paramètre constitue un compromis entre la solution parcimonieuse et la fidélité aux mesures. Si la valeur du paramètre de régularisation est trop faible une multitude de solutions parasites vont apparaître et on aura donc un spectre spatial dans lequel un grand nombre de sources seront redondantes, parasites ou "fantômes". Inversement, si la valeur du paramètre de régularisation est trop importante des solutions ne seront pas prises en compte ou seront rejetées et on aura un spectre spatial dans lequel certaines sources seront absentes. Dans [3] J. Zheng a obtenu un spectre parcimonieux spatial dans lequel le paramètre de régularisation est obtenu de façon empirique en essayant arbitrairement plusieurs valeurs. On présente dans cette communication trois méthodes pour estimer le paramètre de régularisation. La première méthode consiste à étudier la courbe en L construite en reportant les variations du terme de pénalité en fonction du terme d'attache aux données. La deuxième méthode consiste à approcher la norme de Frobenius de l'erreur résiduelle par la distribution du Chi2 et la troisième méthode consiste à approcher cette norme par la distribution de Rayleigh. Des simulations et des résultats expérimentaux en chambre anéchoïque montrent l'efficacité de la procédure développée lors de la localisation de sources sonores.

## 2 Modélisation usuelle en traitement d'antenne

On considère une antenne acoustique formée de N capteurs identiques et P sources ponctuelles placées dans un milieu de propagation supposé idéal. Les ondes incidentes sont planes et le signal observé à la sortie des capteurs à l'instant t s'écrit de manière générale [1, 2]:

$$y(t) = A(\theta) s(t) + b(t) = \sum_{i=1}^P a(\theta_i) s_i(t) + b(t) ; \quad t = \{1, 2, \dots, T\} \quad (1)$$

avec  $s(t)$  le vecteur ( $P \times 1$ ) des amplitudes complexes des signaux émis par les P sources,  $A(\theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_P)]$  la matrice ( $N \times P$ ) des vecteurs directionnels, c'est aussi la matrice de transfert caractéristique du modèle de propagation. C'est cette matrice  $A(\theta)$  qui contient toute l'information sur la position des sources, et même sur la fréquence des signaux émis. On notera  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P]^T$  le vecteur contenant les paramètres (les positions) des sources.  $b(t)$  est le vecteur ( $N \times 1$ ) du bruit apparaissant sur chaque capteur. L'estimation des positions  $\{\theta_i\}$  des sources est un problème paramétrique non-linéaire puisque ces positions sont incorporées dans la matrice de transfert  $A(\theta)$  qui est inconnue. A partir de la connaissance de  $y(t)$  on se propose d'estimer le vecteur  $\theta$  des positions des sources lorsque le nombre d'échantillons temporels est faible (inférieur à 50), en utilisant une représentation parcimonieuse du spectre spatial.

## 3 Représentation parcimonieuse spatiale

### 3.1 Présentation du problème de parcimonie et solution parcimonieuse

Le problème d'estimation paramétrique indiqué par la relation (1) est transformé en un problème de représentation parcimonieuse de localisation de sources. Pour cela nous introduisons une représentation redondante de la matrice de transfert A en considérant plusieurs positions possibles des sources  $\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_L\}$ . Ici on a L positions possibles. Cette matrice constitue un dictionnaire redondant de position des sources et réalise un échantillonnage spatial ou un quadrillage de l'espace analysé. Les atomes de ce dictionnaire sont les L positions potentielles des sources à localiser. Ce nombre de positions L est beaucoup plus grand que le nombre de sources réelles P, et même beaucoup plus grand que le nombre de capteurs N. La matrice A de taille ( $N \times L$ ) est connue et ne dépend pas de la position exacte des sources, contrairement à la relation (1) avec  $A(\theta)$ . Cette matrice de transfert est construite sous la forme suivante :

$$A(\tilde{\theta}) = [a(\tilde{\theta}_1), a(\tilde{\theta}_2), \dots, a(\tilde{\theta}_L)] \quad (2)$$

D'autre part, les amplitudes complexes des signaux atteignant l'antenne acoustique à l'instant  $t$  peuvent être exprimées par un vecteur de dimension  $(L \times 1)$  :  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)]^T$  où le  $k^{\text{ème}}$  élément  $x_k(t)$  n'est pas nul et égal à  $s_k(t)$  si  $x_k(t)$  et  $s_k(t)$  correspondent à la même position de source, alors que tous les autres éléments sont nuls. Nous avons la représentation :

$$y(t) = A(\tilde{\theta}) x(t) + b(t) \quad ; \quad t = \{1, 2, \dots, T\} \quad (3)$$

Le vecteur d'observation  $y(t)$  apparaissant dans (1) ou (3) est identique, mais la localisation des sources est maintenant conditionnée par les valeurs non nulles de  $\{x(t)\}$ . Nous avons transformé le problème de l'estimation paramétrique des positions des sources en un problème d'estimation parcimonieuse spatiale de ces sources : le spectre spatial de  $x(t)$  présentera des pics importants aux positions exactes des sources et, en théorie, des valeurs nulles ailleurs. Avec  $T$  échantillons temporels on définit la matrice  $Y(N \times T)$  des données temporelles :  $Y = [y(1) \ y(2) \dots y(T)]$ , la matrice  $X(L \times T)$  formée des  $L$  vecteurs parcimonieux (la parcimonie est spatiale et non temporelle) et la matrice  $B(N \times T)$  du bruit. Nous avons :

$$Y = A(\tilde{\theta})X + B \quad (4)$$

La matrice  $X$  a par construction une structure bidimensionnelle : une dimension est relative à l'espace, auquel nous affectons l'indice  $i$  qui varie de 1 à  $L$  et l'autre dimension est relative au temps, auquel nous affectons l'indice  $j$  qui varie de 1 à  $T$ . Nous désirons imposer une parcimonie uniquement spatiale sur les éléments de  $X$ . Pour cela nous considérons la norme  $l_2$  des vecteurs ligne de  $X$ , c'est-à-dire nous considérons  $x_i^{(l_2)}$  pour chaque vecteur ligne et nous effectuons une pénalité en norme  $l_1$  du vecteur  $x^{(l_2)} = [x_1^{(l_2)}, x_2^{(l_2)}, \dots, x_L^{(l_2)}]^T$ . Nous avons alors un problème de minimisation sous contraintes faisant intervenir un terme d'attache aux données (ou un terme d'erreur résiduelle) en norme de Frobenius et une pénalité en norme  $l_1$  sur la parcimonie. Ce problème se met sous la forme suivante :

$$\min \|x^{(l_2)}\|_1 \text{ sous la contrainte } \|Y - A(\tilde{\theta})X\|_F^2 \leq \beta^2 \quad (5)$$

où  $\beta$  est le paramètre de régularisation. Un compromis entre fidélité aux mesures et parcimonie de la solution est à trouver et la nature du compromis dépendra de la valeur de  $\beta$  : un  $\beta$  faible favorise les solutions correspondant aux mesures alors qu'un  $\beta$  important conduira à une solution parcimonieuse, au risque de s'éloigner des mesures. La parcimonie du vecteur résultant  $x^{(l_2)}$  correspond à la parcimonie du spectre spatial et notre but est donc de déterminer  $x^{(l_2)}$  lorsque le nombre d'échantillons  $T$  est faible. Une approche algorithmique s'appuyant sur la formulation SOCP (Second Order Cone Programming) [5] sera utilisée. Auparavant il faut estimer la valeur du paramètre de régularisation. Trois méthodes vont être présentées.

### 3.2 Estimation du paramètre de régularisation par la courbe en L

La détermination de la valeur optimale du paramètre de régularisation peut se faire en étudiant les variations de la solution parcimonieuse en norme  $l_1$  en fonction de l'écart aux données en norme de Frobenius

$$\|x^{(l_2)}\|_1 = f(\|Y - A(\tilde{\theta})X\|_F^2) \quad (6)$$

Lorsque nous traçons  $\log(\|x^{(l_2)}\|_1)$  en fonction de  $\|Y - A(\tilde{\theta})X\|_F^2$  nous obtenons une courbe qui a typiquement une forme en L [6] et les points situés sur la courbe correspondent aux valeurs du paramètre de régularisation. La valeur optimale du paramètre de régularisation est obtenue en considérant le point qui se trouve sur le "coin" de la courbe en L. Malheureusement cette courbe présente très souvent plusieurs paliers et il est difficile d'extraire la valeur optimale du paramètre de régularisation. Dans de nombreux cas cette méthode est défaillante. Une approche basée sur l'analyse de la distribution statistique de l'erreur résiduelle est proposée.

### 3.3 Estimation du paramètre de régularisation par une distribution du Chi2

Nous proposons de déterminer le paramètre de régularisation automatiquement lorsque le bruit est statistiquement connu ou estimé. Soit  $X(\beta)$  la matrice spatio-temporelle estimée en utilisant le paramètre de régularisation  $\beta$ . Suivant Malioutov [4], l'idée naturelle est de choisir le paramètre  $\beta$  de sorte que la valeur du résidu suit la même loi statistique que celle du bruit. Si la distribution statistique du bruit est connue, Malioutov propose de choisir  $\beta$  de sorte que  $\|Y - A(\tilde{\theta})X(\beta)\|_F^2$  se rapproche "au mieux" de  $\|B\|_F^2$ .

On note  $b_{mn}$  l'élément (m,n) de la matrice  $B$ . Malioutov suppose que le bruit est gaussien, indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) de variance  $\sigma^2$ . Nous avons donc

$$\|B\|_F^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^T b_{mn}^2 \quad (7)$$

ce qui est la somme du carré de  $NT$  variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et de variance  $\sigma^2$ . Par conséquent,  $\|B\|_F^2 / \sigma^2$ , normalisée par  $\sigma^2$ , suit la loi du Chi2 à  $NT$  degrés de liberté (d.d.l.) :

$\frac{\|B\|_F^2}{\sigma^2} \sim \chi_{NT}^2$ . La fonction de répartition d'une distribution du Chi2 à  $NT$  d.d.l. est

$$p = F(z, NT) = \int_0^z \frac{t^{(NT-2)/2} e^{-t/2}}{2^{NT/2} \Gamma(NT/2)} dt \quad (8)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma (intégrale eulérienne de seconde espèce). La fonction inverse de cette fonction de répartition pour une probabilité  $p$  (ou un intervalle de confiance donné) et  $NT$  d.d.l. est

$$z = F^{-1}(p, NT) = \{z : F(z, NT) = p\} \quad (9)$$

La loi de distribution du bruit étant connue, on peut utiliser un intervalle de confiance pour estimer  $\|B\|_F^2$  et par la suite déterminer le paramètre de régularisation en utilisant la fonction inverse  $F^{-1}(p, NT)$ , pour une probabilité de localisation donnée et  $NT$  d.d.l. Cependant, lorsqu'on utilise la distribution du Chi2 et lorsque le nombre d'échantillons temporels est faible (inférieur à 50), même un intervalle de confiance de 0,999 ne nous permet pas de trouver convenablement le paramètre de régularisation permettant la suppression des sources parasites du spectre spatial (voir le paragraphe 4 sur les applications). On peut donner une explication en considérant la contrainte de l'équation (5)

$$\|Y - A(\tilde{\theta})X\|_F^2 = \|A(\tilde{\theta})S - A(\tilde{\theta})X\|_F^2 + \text{trace}[B(A(\tilde{\theta})S - A(\tilde{\theta})X)^H] + \text{trace}[(A(\tilde{\theta})S - A(\tilde{\theta})X)B^H] + \|B\|_F^2 \quad (10)$$

Par conséquent, si nous utilisons seulement l'égalité  $\beta^2 = \|B\|_F^2$  pour déterminer le paramètre de régularisation le bruit parasite ne sera pas éliminé (même avec un intervalle de confiance de 0,999) et des sources parasites apparaîtront dans le spectre spatial. La valeur du paramètre de régularisation obtenue par la distribution du Chi2 est trop faible et on doit donc "élargir" le domaine de  $\|B\|_F^2$ , autrement dit le paramètre de régularisation doit avoir une plage dynamique plus importante. D'après (5) la valeur du paramètre  $\beta$  doit être suffisamment importante pour que la probabilité que  $\|B\|_F^2 \geq \beta$  soit faible.

### 3.4 Estimation du paramètre de régularisation par une distribution de Rayleigh

On considère que le bruit est complexe, gaussien, indépendant et identiquement distribué (i.i.d.) de variance  $\sigma^2$ . L'élément (m,n) de la matrice  $B$  s'écrit  $b_{mn} = c_{mn} + j d_{mn}$  avec  $m=1,2,\dots,N$  et  $n=1,2,\dots,T$

$$\|B\|_F^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^T (c_{mn}^2 + d_{mn}^2) \quad (11)$$

Or si  $c_{mn}$  et  $d_{mn}$  sont des variables aléatoires indépendantes centrées et de même variance  $\sigma^2/2$ :

$c_{mn} \sim N(0, \sigma^2/2)$  et  $d_{mn} \sim N(0, \sigma^2/2)$  alors  $|b_{mn}| = \sqrt{c_{mn}^2 + d_{mn}^2}$  obéit à la distribution de Rayleigh. La fonction de répartition de la distribution de Rayleigh est :

$$p_{mn} = G(|b_{mn}|, \sigma^2/2) = \int_0^{|b_{mn}|} \frac{2t e^{-t^2/\sigma^2}}{\sigma^2} dt \quad (12)$$

La fonction inverse de la fonction de répartition de la distribution de Rayleigh pour une probabilité  $p_{mn}$  et un paramètre d'échelle (ou variance)  $\sigma^2/2$  est

$$|b_{mn}| = G^{-1}(p_{mn}, \sigma^2/2) = \left\{ |b_{mn}| : G(|b_{mn}|, \sigma^2/2) = p_{mn} \right\} \quad (13)$$

et nous déduisons

$$\|B\|_F^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^T |b_{mn}|^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^T G^{-1}(p_{mn}, \sigma^2/2) \leq NT G^{-1}(p_{\max}, \sigma^2/2) = \beta_{\text{Rayl}}^2 \quad (14)$$

expression dans laquelle  $p_{\max} = \max\{p_{mn}\}$ . La valeur du paramètre de régularisation sera obtenue en considérant la fonction inverse de la fonction de répartition de la distribution Rayleigh et en utilisant (14).

## 4 Applications

On considère une antenne acoustique formée de 6 capteurs, équidistants de  $d/\lambda = 0,5$ . Deux sources décorréées sont situées à  $0^\circ$  et  $10^\circ$  par rapport à la normale de l'antenne. Le nombre d'échantillons temporels est  $T=50$  et le rapport signal sur bruit (RSB) est de 20 dB. Les figures 1(a et b) nous montrent les variations du paramètre de régularisation en utilisant les 3 méthodes présentées. La courbe en L (figure 1(a)) présente plusieurs paliers et il est difficile de déterminer la valeur du paramètre de régularisation. La figure 1(b) présente les variations du paramètre de régularisation en fonction de la probabilité  $p$  de localisation des sources (ou l'intervalle de confiance) en utilisant la distribution du Chi2 et la distribution de Rayleigh. Une plage dynamique plus importante apparaît avec la distribution de Rayleigh. La figure 1(c) montre 20 spectres spatiaux lorsque le paramètre de régularisation est obtenu par la distribution du Chi2 avec une probabilité de localisation de 0,99. Le nombre des sources parasites est trop important et il est impossible de localiser les deux sources réelles. Un intervalle de confiance de 0,999 est considéré dans la figure 1(d). Des pics parasites sont toujours présents. L'utilisation du paramètre de régularisation en utilisant la distribution du Chi2 ne nous permet pas de supprimer les sources parasites.

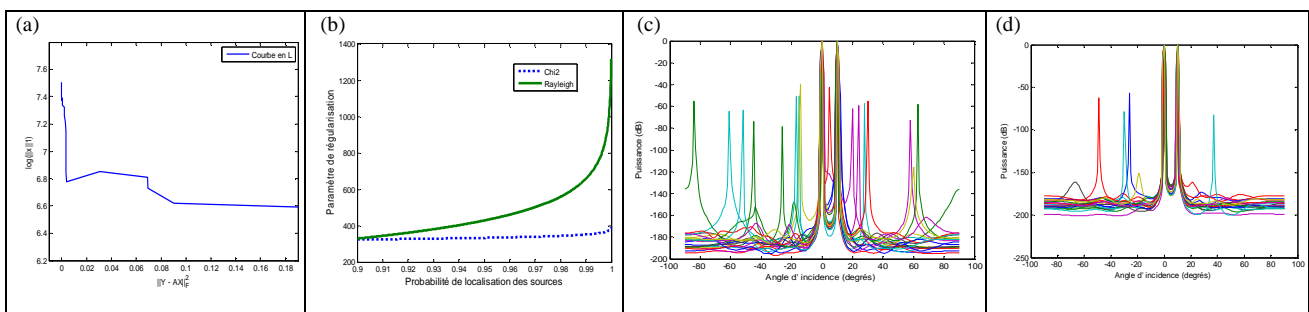


Figure1. (a) Paramètre de régularisation par la méthode en L ; (b) Paramètre de régularisation par la distribution du Chi2 et par la distribution de Rayleigh ; (c) Spectre spatial par la distribution du Chi2 avec  $p=0,99$  ; (d) avec  $p=0,999$  (les deux sources sont décorréées)

La figure 2(a) nous montre les 20 spectres spatiaux lorsque le paramètre de régularisation est déterminé par la distribution de Rayleigh avec un intervalle de confiance de 0,99. Les deux sources peuvent être localisées sans ambiguïté. Considérons maintenant le cas de deux sources corrélées situées à  $0^\circ$  et  $10^\circ$  par rapport à la normale de l'antenne. Le nombre d'échantillons est  $T=50$  et  $RSB=20$  dB. La figure 2(b) nous montre les variations du paramètre de régularisation en fonction de la probabilité de localisation et la figure 2(c) les 20 spectres spatiaux des deux sources corrélées en utilisant la distribution de Rayleigh et  $p=0,99$ . Les deux sources corrélées peuvent être localisées.

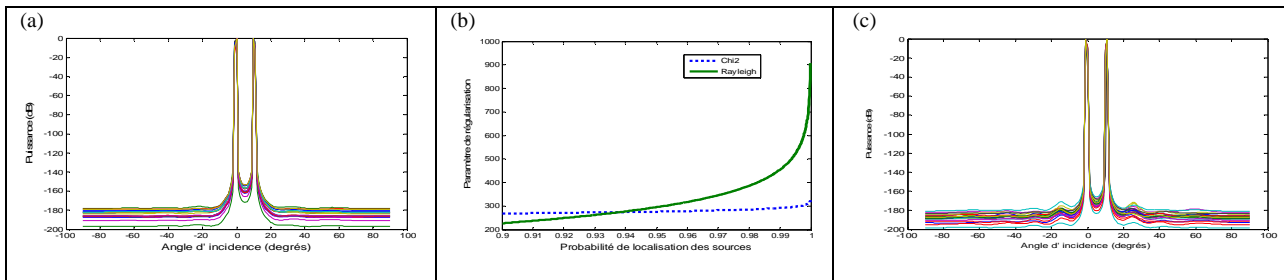


Figure 2. (a) Spectre spatial par la distribution de Rayleigh avec  $p=0,99$  (les deux sources sont décorrélées) ; (b) Paramètre de régularisation par la distribution du Chi2 et par la distribution de Rayleigh (les deux sources sont corrélées) ; (c) Spectre spatial par la distribution de Rayleigh avec  $p=0,99$  (les deux sources sont corrélées)

L'étude expérimentale sur la localisation de deux sources en chambre anéchoïque est présentée sur la figure 3(a). Les deux sources sont deux haut-parleurs qui émettent des ondes sinusoïdales. La distance entre les microphones est  $d=\lambda/2$ . Les variations du paramètre de régularisation en fonction de la probabilité de localisation des sources sont représentées sur la figure 3(b) pour les deux distributions. Le paramètre de régularisation sera obtenu en utilisant la distribution de Rayleigh avec une probabilité de localisation  $p=0,99$ . Le spectre spatial obtenu par parcimonie (figure 3c) nous permet de localiser les deux sources.

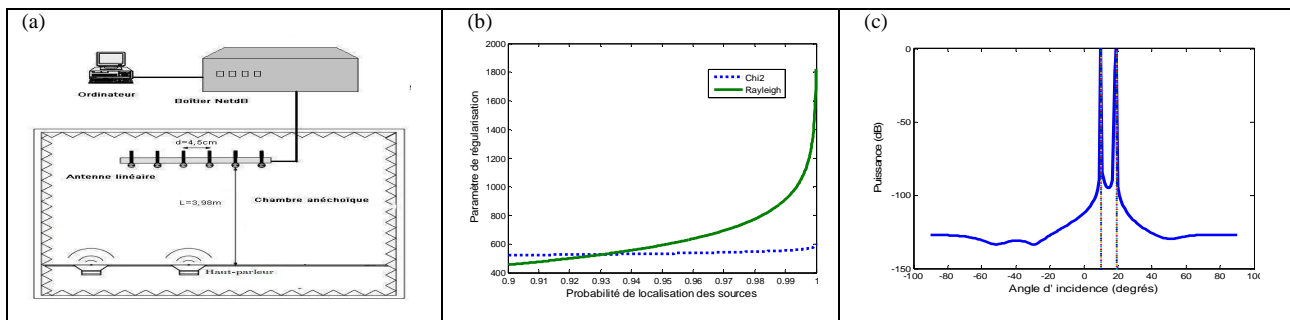


Figure 3. (a) Schéma expérimental ; (b) Paramètre de régularisation par la distribution du Chi2 et par la distribution de Rayleigh ; (c) Spectre spatial expérimental en utilisant la distribution de Rayleigh avec  $p=0,99$

## 5 Conclusion

Le paramètre de régularisation joue un rôle important lors de la localisation de sources par parcimonie : un paramètre trop faible conduit à l'apparition d'un nombre important de sources parasites dans le spectre spatial. Ce paramètre de régularisation constitue un compromis entre la solution parcimonieuse du spectre spatial et l'erreur résiduelle. Nous avons effectué une analyse pour obtenir la valeur de ce paramètre en se fixant une probabilité de localisation. Sous l'hypothèse que le bruit est complexe, gaussien et i.i.d., on élargit le domaine dynamique du paramètre de régularisation en utilisant la distribution de Rayleigh. On a montré que l'algorithme développé a d'excellentes performances en simulation et expérimentalement en chambre anéchoïque lors de la localisation de sources sonores.

## Références

- [1] S.U. Pillai; Array signal processing; Springer-Verlag; 1989
- [2] J. Lardiès, H. Ma, M. Berthillier, Localization of radiating sources by an acoustical array; Third International Conference on Multidisciplinary Design, Optimization and Applications; Paris, Juin 2010
- [3] J. Zheng, M. Kaveh and H. Tsuji; Sparse spectral fitting for direction of arrival and power estimation; Proc.IEEE/SP; 15<sup>th</sup> Workshop on Statistical Signal; 2009
- [4] D.M. Malioutov, M. Cetin, A.S.Willsky; A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays; IEEE Trans. Signal Processing; Vol. 53, pp. 3010-3022; 2005
- [5] J.S. Sturm; Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones; Optimization Methods and Software; Vol. 11, pp. 625-653; 1999
- [6] P.C. Hansen; The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems; Advances in Computational Bioengineering; Edit. P. Johnston; 2000